Решение задач ЕГЭ с ~~отрезками~~ множествами: быстрый метод

О.Б. Богомолова,
д. п. н., учитель информатики и математики ГБОУ СОШ № 1360, Восточный округ г. Москвы,

Д.Ю. Усенков,
Москва,

Александра Костычева,
ученица 11-го "А" класса ГБОУ СОШ № 1360, Восточный округ г. Москвы

В тренировочных вариантах ЕГЭ, предлагавшихся учащимся в конце 2014 года, задачи "18" ("На числовой прямой даны два отрезка, выберите такой отрезок, что логическая формула тождественно истинна") были заменены на новую разновидность, в которых требуется сделать то же самое уже не для отрезков, а для множеств, состоящих из натуральных чисел. По сути, смысл рассуждений при решении таких задач аналогичен, но непривычная форма условия и меньшая наглядность (задачи с отрезками мы привыкли решать графически, а с множествами такая форма решения на первый взгляд не годится) поставили многих школьников в тупик.

Решение задач с множествами путем логических рассуждений уже было разобрано в статье "Тренинг по информатике: «разбор полетов»" ("Информатика" № 3 за 2015 г.). Но, как уже сказано выше, абстрактные рассуждения оказались трудными для многих учеников. Поэтому предлагаемый ниже графический метод решения таких задач наверняка "придется по вкусу" тем, для кого в решении важна наглядность. Кроме того, этот графический метод во многом сводит решение таких задач к "механически" выполняемому алгоритму, что существенно ускоряет решение по сравнению с использованием логических рассуждений.

Задача 1. Элементами множества X являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(n \in \{2,3,6,8,10\}) \to$$
$$\to (((n \in \{1,3,6,7,9\}) \wedge$$
$$\wedge \neg(n \in X)) \to \neg(n \in \{2,3,6,8,10\}))$$

истинно (принимает значение 1) при любом значении n. Требуется определить наименьшее возможное значение произведения элементов множества X.

Решение

Начало решения в любом случае одно и то же: для упрощения работы мы вводим для используемых в выражении множеств обозначения в виде латинских букв R и Q, а затем заменяем записи условий принадлежности переменной n соответствующему множеству одноименными логическими переменными:

множества: $Q = \{2, 3, 6, 8, 10\}$, $R = \{1, 3, 6, 7, 9\}$;

логические переменные:

$Q = n \in \{2, 3, 6, 8, 10\}$,

$R = n \in \{1, 3, 6, 7, 9\}$,

$X = (n \in X)$.

Далее мы переписываем заданное логическое выражение с учетом этих замен и выполняем его упрощение, избавляясь от операции следования и (по возможности) от скобок:

$(n \in \{2,3,6,8,10\}) \to$

$\to (((n \in \{1,3,6,7,9\}) \wedge \neg(n \in X)) \to$

$\to \neg(n \in \{2,3,6,8,10\})) \to Q \to ((R \wedge \neg X) \to \neg Q)$

Правда, нам удобнее для обозначения операции отрицания использовать надчеркивание переменных: $Q \to ((R \wedge \overline{X}) \to \overline{Q})$.

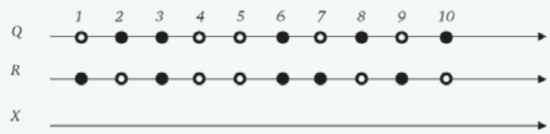
Упрощаем это выражение, пользуясь правилом замены операции следования на операцию ИЛИ ($A \to B = \overline{A} \vee B$):

$$Q \to ((R \wedge \overline{X}) \to \overline{Q}) = \overline{Q} \vee (\overline{(R \wedge \overline{X})} \vee \overline{Q}) =$$
$$= \overline{Q} \vee (\overline{R} \vee X \vee \overline{Q}) = \overline{Q} \vee \overline{R} \vee X \vee \overline{Q} = \overline{Q} \vee \overline{R} \vee X.$$

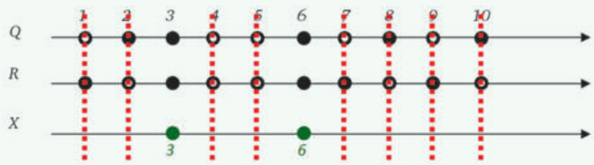
А теперь перейдем к графической части решения.

1) Рисуем числовые прямые, соответствующие множествам Q, R и X (лучше всего делать это на тетрадном листке в клеточку). Отмечаем на них позиции, соответствующие всем возможным числам, используемым в множествах (в данном случае — от 1 до 10, так как наименьшее число, встречающееся в заданных множествах, равно 1, а наибольшее равно 10).

2) На числовой прямой, соответствующей множеству Q, размечаем точки по следующему правилу: для числа, которое ***есть*** в этом множестве, точка должна быть ***черной*** (закрашенной), а для числа, которого ***нет*** в этом множестве, точка должна быть белой (в виде пустого кружочка). Затем то же самое делаем и для числовой прямой, соответствующей множеству R.



3) Смотрим на получившееся у нас логическое выражение: $\overline{Q} \vee \overline{R} \vee X$. В нем заданные нам (в виде условий принадлежности чисел соответствующим множествам) значения $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ связаны друг с другом и с переменной X логической операцией ИЛИ. Для гарантированной истинности этого выражения достаточно, чтобы ***хотя бы одно*** из значений — $\overline{Q}$ или $\overline{R}$ — было истинно. В нашем графическом методе действует правило: ***для переменной без надчеркивания*** (т.е. без отрицания) "истинными" являются ***черные*** точки, а ***для переменной с надчеркиванием*** (т.е. под отрицанием) "истинными" являются ***белые*** точки. У нас переменные Q и R записаны с надчеркиванием. Поэтому на нашем рисунке мы вычеркиваем вертикальными линиями все такие числовые позиции, где на осях Q и R есть ***хотя бы одна белая точка***. А в позициях, которые на числовой прямой множества X остались не зачеркнутыми, проставляем "черные" точки (для большей наглядности мы их выделим зеленым цветом).



Заметим, что все остальные натуральные значения числовой прямой также принадлежат, например, $\overline{Q}$ и могут не входить в X. Задача практически решена: найденные значения — числа 3 и 6 — это и есть минимально необходимые элементы множества X, обеспечивающие истинность заданного выражения на всей числовой прямой для натуральных чисел.

Завершить же вычисления — подсчитать количество элементов множества X, их сумму или произведение — уже совсем просто. В нашей задаче требуется произведение — оно равно 3 * 6 = 18.

Ответ: 18.

Задача 2. Элементами множества X являются натуральные числа. Известно, что выражение

$\neg(n \in \{2, 3, 6, 8, 10\}) \wedge$

$\wedge \neg(n \in \{1, 3, 6, 7, 9\}) \vee (n \in X)$

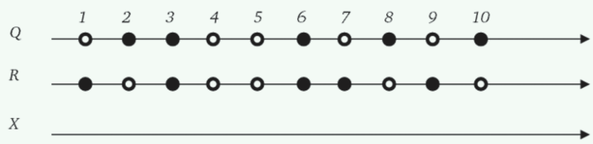
истинно (принимает значение 1) при любом значении n. Требуется определить наименьшее возможное количество элементов множества X.

Решение

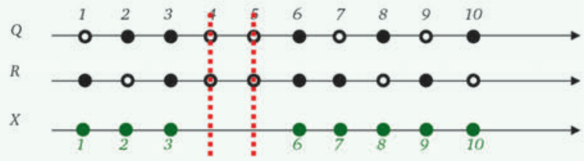
После выполнения замен получаем: $\overline{Q} \wedge \overline{R} \vee X$.

Перейдем к графической части решения.

1) Рисуем числовые прямые, соответствующие множествам Q, R и X, и размечаем на них точки по тем же правилам (если число есть в множестве, то точка черная, если числа нет — точка белая).



2) В полученном логическом выражении $\overline{Q}\wedge\overline{R}\vee X$ заданные значения $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ связаны друг с другом логической операцией И, которая выполняется первой (до операции ИЛИ с переменной X). Для гарантированной истинности такого выражения требуется, чтобы ***оба*** значения — $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ — были истинными. Поскольку переменные Q и R в нашем выражении записаны ***с надчеркиванием***, “истинными” для нас являются ***белые*** точки. Поэтому на рисунке мы вычеркиваем вертикальными линиями все такие числовые позиции, где на осях Q и R ***обе точки белые*** (позиции, большие 10, также вычеркнуты). Оставшиеся позиции на числовой прямой X заполняем “черными” (точнее, зелеными) точками.



И опять задача практически решена: найденные значения — это минимально необходимые элементы множества X. Их количество легко подсчитать — их 8.

Ответ: 8.

Итак, наш графический метод позволяет быстро (и практически не раздумывая) отыскать весь минимально необходимый набор элементов искомого множества для уже упрощенного логического выражения (от его упрощения мы, таким образом, не освобождены). Понять “принципы” его работы несложно:

- когда мы первоначально заполняем прямые черными и белыми точками, то фактически кодируем черным цветом истинность условия “соответствующее число принадлежит соответствующему множеству”, а белым — ложность этого условия;
- когда мы затем рассматриваем в качестве “истинных” для переменных с надчеркиванием именно белые точки (а не черные), то мы учитываем, что из-за операции отрицания соответствующие условия принадлежности множествам из ложных становятся истинными;
- наконец, когда мы вычеркиваем позиции, в которых есть хотя бы одна белая точка (если переменные $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ связаны операцией ИЛИ) либо в которых обе точки белые (если переменные $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ связаны операцией И), мы фактически исключаем из возможного множества X такие значения элементов, при которых наше логическое выражение и так истинно. А в не вычеркнутых позициях прямой X остаются такие значения, которые обеспечивают истинность выражения в случаях, когда эту истинность не могут обеспечить переменные $\overline{Q}$ и $\overline{R}$; очевидно, что количество таких элементов множества X “автоматически” получается минимально возможным, так как среди них нет ни одного “избыточного” — только необходимые, а значит, минимальными будут и сумма, и произведение этих элементов.

Особо отметим и ситуацию вне рассматриваемого нами диапазона чисел (в рассмотренных нами задачах — от 11 и больше, до “плюс бесконечности”). Поскольку этих чисел нет ни в одном заданном множестве, им всем будут соответствовать только белые точки. А поскольку у нас в обеих задачах переменные Q и R записаны с надчеркиваниями, все эти позиции (независимо от операции, связывающей Q и R, — будет ли это И либо ИЛИ) должны быть вычеркнуты и в множество X все равно не войдут. Поэтому числа вне возможного разброса значений элементов заданных множеств можно вообще не рассматривать.

Заметим, кстати, и еще пару интересных фактов о подобных задачах. Очевидно, что осмысленный числовой ответ на такую задачу возможен только при условии в задаче, что искомое множество будет содержать минимально возможное количество элементов (иначе ответ либо неоднозначен, либо вообще не может быть дан, если, например, в множестве X будет бесконечно много элементов). Отсюда следует, что в любом случае числовой луч от наибольшего существующего в заданных множествах элемента и до “плюс бесконечности” не должен входить в решение задачи (в множество X). А поскольку этому числовому лучу соответствуют элементы, отсутствующие в обоих заданных множествах (которые тоже не могут быть бесконечными), в упрощенном логическом выражении переменные Q и R могут быть только с надчеркиваниями (иначе эту часть числового луча не удастся исключить из решения). А это, в свою очередь, означает, что вычеркивать мы будем на рисунке только белые точки (позиции, где таких точек хотя бы одна либо где такие точки обе белые).

Правда, разработчики заданий ЕГЭ могут в принципе и переформулировать задачу. Например, так:

Задача 3. Элементами множества X являются натуральные числа. Известно, что выражение

$\neg(n \in \{2, 3, 6, 8, 10\}) \vee$
$\vee (n \in \{1, 3, 6, 7, 9, 11\ldots\}) \vee$
$\vee (n \in X) \vee \neg(n \in \{2, 3, 6, 8, 10\})$

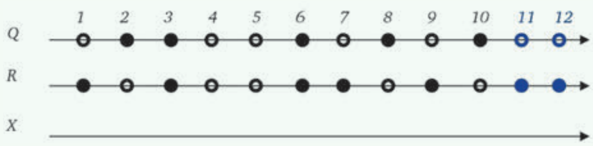
истинно (принимает значение 1) при любом значении n. Требуется определить наименьшее возможное значение суммы элементов множества X.

Решение

Выполнив замены и упростив выражение, получаем:

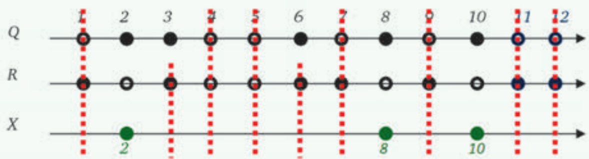
$$\overline{Q}\vee R\vee X\vee\overline{Q}=\overline{Q}\vee R\vee X.$$

Как видим, переменная R здесь записана без надчеркивания. Но и множество R тоже задано по-особому: $R = \{1, 3, 6, 7, 9, 11\ldots\}$ — оно имеет бесконечное число элементов, т.е. в него входят ***все*** натуральные числа, начиная с 11 и до “плюс бесконечности”. Поэтому на числовых прямых мы проставляем черные точки (для R) и белые точки (для Q) правее 10 (реально рисуем одну-две такие дополнительные позиции, но подразумеваем, что они длятся вправо до бесконечности). На нашем рисунке эти дополнительные точки изобразим синим цветом.



В полученном логическом выражении $\overline{Q} \vee R \vee X$ заданные значения $\overline{Q}$ и R связаны друг с другом логической операцией ИЛИ. Значит, для гарантированной истинности этого выражения достаточно, чтобы истинным было хотя бы одно значение — $\overline{Q}$ или R. Переменная Q в нашем выражении записана ***с надчеркиванием***, поэтому "истинными" являются ***белые*** точки. А вот для переменной R, записанной ***без надчеркивания***, "истинными" являются уже ***черные*** точки.

Поэтому на рисунке мы вычеркиваем вертикальными линиями сначала все числовые позиции, где ***на оси Q*** расположены ***белые*** точки, а затем среди оставшихся позиций — все, где ***на оси R*** расположены ***черные*** точки. При этом числовые позиции, начиная от значения 11 и до "плюс бесконечности", очевидно, тоже будут вычеркнуты. Оставшиеся позиции на числовой прямой X, как и раньше, заполняем "черными" (зелеными) точками.



Найдя минимально необходимые значения элементов множества X: {2, 8, 10}, осталось вычислить их сумму: 2 + 8 + 10 = 20.

Ответ: 20.

Задача 4 (типичная для последней диагностической работы в формате ЕГЭ). Элементами множеств X, Y, Z являются натуральные числа. При этом $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Z = \{3, 4, 7, 9, 11, 12\}$. Известно, что выражение

$$\big((m \in X) \to (m \in Y)\big) \wedge \big((m \in Z) \to \overline{(m \in X)}\big)$$

истинно (принимает значение 1) при любом значении m. Требуется определить наибольшее возможное количество элементов множества X.

Решение

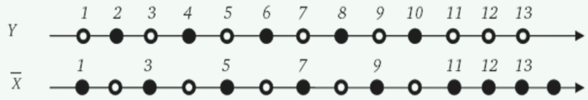
Аналогично предыдущим задачам, сначала заменяем операции принадлежности множествам одноименными логическими переменными (строчные буквы x, y, z), а операцию следования — на операцию ИЛИ:

$$(x \to y) \wedge (z \to \overline{x}) \;\to\; (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{z} \vee \overline{x}).$$

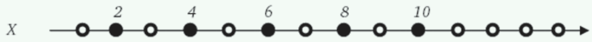
Теперь приступим к графическому решению, проводя его в несколько шагов. При этом, поскольку в выражении $(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{z} \vee \overline{x})$, которое у нас должно быть тождественно истинным, последняя выполняемая операция — И, каждый из соединяемых ею термов должен быть истинным.

Шаг 1: $(\overline{x} \vee y)$.

Для набора значений y нужно так подбирать значения $\overline{x}$, чтобы значение этой операции И всегда было ложно. При этом для переменной y истинными являются "черные" точки, и они уже обеспечивают истинность данного терма. А вот "пустые" точки на оси Y мы должны закрыть "черными" точками на оси $\overline{X}$ (включая и все отсутствующие в Y значения от 13 до $+\infty$):

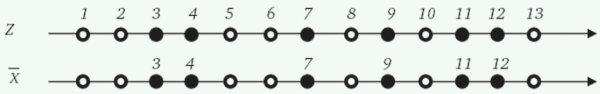


А теперь, поскольку у нас переменная x записана с надчеркиванием, *инвертируем* полученное множество значений-точек на оси $\overline{X}$ (заменяем "черные" точки "пустыми" и наоборот):

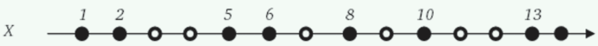


Шаг 2: $(\overline{z} \vee \overline{x})$.

Для набора значений $\overline{z}$ нужно подбирать значения $\overline{x}$, чтобы значение и этой операции И всегда было истинно. Так как переменная z записана с отрицанием, истинными на оси Z являются "пустые" точки, и они уже обеспечивают истинность этого терма. Нам же нужно закрыть "черными" точками на оси $\overline{X}$ все "черные" точки на оси Z:

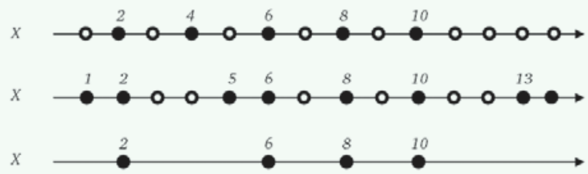


И, так же, как на предыдущем шаге, инвертируем полученный набор точек:



Шаг 3: объединяем полученные "варианты" множеств X.

Поскольку последняя выполняемая операция — И, а результат должен быть истинным, выбираем в обоих "вариантах" X только те значения, для которых в обоих "вариантах" имеются "черные" точки:



Таких точек получилось четыре.

Ответ: 4.

Таким образом, наш метод работает и для возможных "модифицированных" задач. Этот метод можно использовать и для задач с большим количеством заданных множеств. Принцип решения для таких задач будет прежним. Разве что если в выражении будет оставаться несколько различных логических операций с разным приоритетом (очередностью выполнения), может быть удобно рисовать числовые прямые для промежуточных "вычислений", при этом на таких промежуточных прямых для не вычеркнутых позиций надо будет рисовать черные точки, а для вычеркнутых — белые.

Есть у рассмотренного графического метода один недостаток. Если числа в заданных множествах даны с большим разбросом (например, $Q = \{2, 3, 6, 15, 26, 30\}$, а $R = \{1, 3, 6, 12, 15, 35\}$), то придется при заполнении числовых прямых рисовать слишком много точек (заполнять 35 числовых позиций!), и рисунок окажется слишком громоздким. В таком случае быстрее и удобнее окажется как раз метод логических рассуждений, когда мы уже при рассмотрении первых двух-трех чисел — элементов множеств вырабатываем некоторое правило заполнения множества X, а затем просто записываем в него нужные числа.