

Люблю ЕГЭ за B15, или Еще раз про метод отображения

► Задание на решение системы логических уравнений остается в ЕГЭ одним из самых сложных. Но решение этой системы не только проверяет знание логических операций и умение считать у наших школьников, но и учит рассуждать, строить логические цепочки. Конечно, оно незаслуженно находится в части В. При оценке ответа нет возможности квалифицировать ошибку, так как ответ, как и логическое высказывание, бывает либо истинным, либо ложным. А поводов дать неверный в этом случае ответ много: можно написать наугад, а можно решить все от начала до конца, проделать все логические

преобразования, выстроить верную цепочку рассуждений и в последнем действии допустить арифметическую ошибку. Заметим, что при решении этого задания количество только арифметических действий доходит до 40. Но тут у выпускников и учителей нет выбора. Будем действовать по схеме — сначала купили, потом полюбили. За что можно полюбить это задание? Например, за то, что оно не скучное, что в нем больше разнообразия, чем в задачах на количество информации, где надо просто применить формулу, или в задачах про системы счисления, в которых надо освоить три алгоритма. На примере задания B15 можно еще раз поговорить о сложных понятиях информатики: “деревья”, “графы”, “матрица смежности”. А самое главное, B15 учит думать и рассуждать.

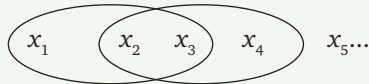
Существует много вариантов решения задания B15, но в этой статье все системы будут решены методом отображений, который разнообразен в своем применении и опубликован в № 10 журнала “Информатика”, 2013 г. Одним из ключе-

вых моментов при разборе систем является определение основного отображения, необходимого для решения системы. Обратите внимание, что в примерах знак “.” обозначает конъюнкцию, а “+” — дизъюнкцию.

Система 1

$$\begin{cases} x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \oplus x_3) = 1 \\ x_2 \cdot (x_3 + \overline{x_4}) + \overline{x_2} \cdot (x_3 \oplus x_4) = 1 \\ \dots \\ x_8 \cdot (x_9 + \overline{x_{10}}) + \overline{x_8} \cdot (x_9 \oplus x_{10}) = 1 \end{cases}$$

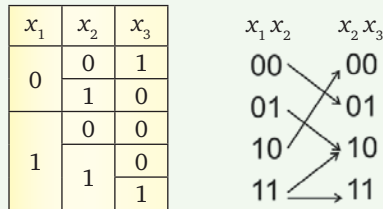
В этой системе в двух соседних уравнениях присутствует пара общих неизвестных



Зная количество пар (x_1, x_2) , можно найти количество пар (x_2, x_3) и найти общее количество решений первого уравнения системы, а продолжая применять правило, построенное для первого уравнения, можно найти количество пар (x_9, x_{10}) и определить, сколько раз дерево решений доведет до x_{10} , что и будет ответом к этому заданию. В цепочке рассуждений будем переходить от пары к паре:

$$(x_1, x_2) \Rightarrow (x_2, x_3) \Rightarrow (x_3, x_4) \Rightarrow (x_4, x_5) \Rightarrow \dots \Rightarrow (x_9, x_{10})$$

Построим дерево решений первого уравнения и отображение, соответствующее первому уравнению:



Пара	Количество пар								
	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	1	1	2	2	2	3	3	3	4
01	1	1	1	2	2	2	3	3	3
10	1	2	2	2	3	3	3	4	4
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1

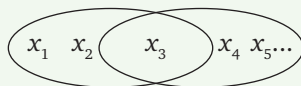
$$4 + 3 + 4 + 1 = 12$$

Ответ: 12

Система 2

$$\begin{cases} x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot (x_2 \oplus x_3) = 1 \\ x_3 \cdot (x_4 + \overline{x_5}) + \overline{x_3} \cdot (x_4 \oplus x_5) = 1 \\ x_5 \cdot (x_6 + \overline{x_7}) + \overline{x_5} \cdot (x_6 \oplus x_7) = 1 \\ x_7 \cdot (x_8 + \overline{x_9}) + \overline{x_7} \cdot (x_8 \oplus x_9) = 1 \end{cases}$$

Эта система похожа на систему 1, но в ней меньше уравнений. В двух соседних уравнениях присутствует одна общая неизвестная.

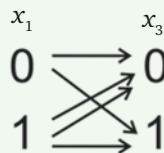


Цепочка рассуждений при построении решения системы будет такой:

$$x_1 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_5 \Rightarrow x_7 \Rightarrow x_9$$

Дерево решений совпадает с деревом первой системы. При решении этой системы можно построить другое отображение. x_1 может принять два различных значения и x_3 также два разных значения.

x_1	x_2	x_3
0	0	1
	1	0
1	0	0
	1	0
		1



Начиная строить дерево решений с $x_1 = 1$, можно построить три ветки, ведущие x_3 . Из них две идут к нулевому значению и одна к единице.

Таблица вычислений будет такой:

	Количество значений				
	x_1	x_3	x_5	x_7	x_9
0	1	3	7	17	41
1	1	2	5	12	29

$41 + 29 = 70$

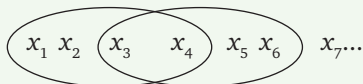
Ответ: 70

Разберем систему, в которой задать отображение с помощью стрелок не удобно.

Система 3

$$\begin{cases} x_1 \cdot (x_2 \rightarrow \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot x_4 = 1 \\ x_3 \cdot (x_4 \rightarrow \overline{x_5}) + \overline{x_3} \cdot x_6 = 1 \\ x_5 \cdot (x_6 \rightarrow \overline{x_7}) + \overline{x_5} \cdot x_8 = 1 \\ x_7 \cdot (x_8 \rightarrow \overline{x_9}) + \overline{x_7} \cdot x_{10} = 1 \end{cases}$$

В этой системе в двух соседних уравнениях присутствует пара общих неизвестных



Каждое уравнение системы зависит от четырех переменных. Индексы соседних уравнений отличаются на 2. Общими переменными для соседних уравнений является пара переменных. Зная количество пар (x_1, x_2) , можно найти количество пар (x_3, x_4) . Ветки построенного дерева будут вести к элементу x_{10} , что соответствует последней паре (x_9, x_{10}) .

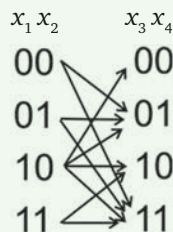
$(x_1, x_2) \Rightarrow (x_3, x_4) \Rightarrow (x_5, x_6) \Rightarrow (x_7, x_8) \Rightarrow (x_9, x_{10})$

Построим дерево решений первого уравнения:

$x_1 \cdot (x_2 \rightarrow \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot x_4 = 1$

Построим дерево решений первого уравнения и отображение, соответствующее первому уравнению. Из каждой пары может выходить четыре стрелки и в каждую пару может входить до четырех стрелок. Запись отображения с помощью стрелок трудно читается, но стрелки не единственный способ для записи соответствия.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	1
		1	1
	1	0	1
		1	1
1	0	0	0
		0	1
		1	0
		1	1
	1	0	x
		1	0
			0
			1



Можно полученное отображение записать в виде рекуррентных формул:

$$F(00) = F(10);$$

$$F(01) = F(00) + F(01) + F(10);$$

$$F(10) = F(10) + F(11);$$

$$F(11) = F(00) + F(01) + F(10) + F(11).$$

А можно задать отображение с помощью матрицы смежности:

		приемник			
		00	01	10	11
источник	00		+		+
	01		+		+
	10	+	+	+	+
	11			+	+

Пара	Количество пар				
	x_1, x_2	x_3, x_4	x_5, x_6	x_7, x_8	x_9, x_{10}
00	1	1	2	6	16
01	1	3	6	14	36
10	1	2	6	16	40
11	1	4	10	24	60

$$16 + 36 + 40 + 60 = 152$$

Ответ: 152

Система 4

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) = 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) \cdot (y_4 \rightarrow y_5) = 1 \\ x_4 \rightarrow y_4 = 1 \end{cases}$$

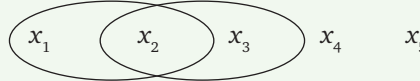
Первый способ

Два первых уравнения отличаются только буквами, значит, решение их будет одинаковым. Рассмотрим первое уравнение:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

Его можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 = 1 \\ x_2 \rightarrow x_3 = 1 \\ x_3 \rightarrow x_4 = 1 \\ x_4 \rightarrow x_5 = 1 \end{cases}$$

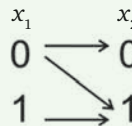


Цепочка рассуждений при построении решения системы будет такой:

$$x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_5$$

Построим дерево решений и соответствующее ему отображение:

x_1	x_2
0	0
	1
1	1



Для второго уравнения системы рассуждения повторяются. В системе присутствует третье уравнение, связывающее первые два. Значит, необходимо заполнить две таблицы при разных значениях x_4 .

$$x_4 = 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	0	1

два решения

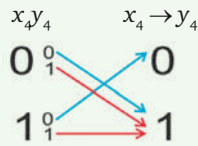
$$x_4 = 1$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	1	1	0	0
1	1	2	3	4	4

четыре решения

Отображение для третьего уравнения (решение одного уравнения методом отображения также рассмотрено в журнале "Информатика", № 10/2013).

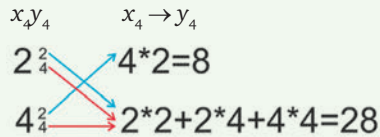
Отображение для импликации:



Ответ: 28

Второй способ

Вычисления:



$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) = 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) \cdot (y_4 \rightarrow y_5) = 1 \\ x_4 \rightarrow y_4 = 1 \end{cases}$$

Можно записать эту систему в виде одного уравнения, применив конъюнкцию к левым частям уравнений. Перегруппируем выражение в левой части уравнения и опять запишем в виде системы:

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (y_1 \rightarrow y_2) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) = 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) = 1 \\ (x_4 \rightarrow x_5) \cdot (y_4 \rightarrow y_5) = 1 \\ x_4 \rightarrow y_4 = 1 \end{cases}$$

Каждое уравнение системы зависит от четырех переменных. Общими переменными для соседних уравнений является пара переменных.

$$(x_1, y_1) \Rightarrow (x_2, y_2) \Rightarrow (x_3, y_3) \Rightarrow (x_4, y_4) \Rightarrow (x_5, y_5)$$

Построим дерево решений первого уравнения:

x_1	y_1	x_2	y_2	
0	0	0	0	
			1	
		1	0	
			1	
	1	0	0	x
			1	0
1		0	x	
		1	1	

Отображение зададим матрицей смежности и для удобства вычислений совместим в одну таблицу матрицу и вычисления. Так как по последнему уравнению подходят три пары (01), (01), (11), то количество пар (10) в четвертом столбике будет равно 0.

Матрица смежности

Количество решений

		приемник								
		00	01	10	11	x_1, y_1	x_2, y_2	x_3, y_3	x_4, y_4	x_5, y_5
ИСТОЧНИК	00	+	+	+	+	1	1	1	1	1
	01		+		+	1	2	3	4	5
	10			+	+	1	2	3	0	1
	11				+	1	4	9	16	21

$$1 + 5 + 1 + 21 = 28$$

Ответ: 28

Система 5

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_5 \rightarrow x_6) = 1 \\ (x_1 \rightarrow y_1) \cdot (x_2 \rightarrow y_2) \cdot (x_3 \rightarrow y_3) \cdot (x_4 \rightarrow y_4) \cdot (x_5 \rightarrow y_5) \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1 \end{cases}$$

Первый способ

Выражения в левой части первого и второго уравнений равны 1, следовательно, и произведение левых частей равно 1.

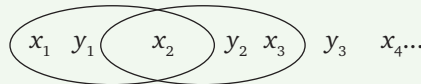
$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow y_5) = 1$$

Перегруппируем множители:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow x_6) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow y_5) \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1$$

И запишем полученное уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_2 \rightarrow y_2) = 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_3 \rightarrow y_3) = 1 \\ (x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_4 \rightarrow y_4) = 1 \\ (x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_5 \rightarrow y_5) = 1 \\ x_6 \rightarrow y_6 = 1 \end{cases}$$



Общими переменными для соседних уравнений является одна переменная.

$$x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_5 \Rightarrow x_6 \Rightarrow y_5$$

Для первого уравнения системы (и похожих на него 2, 3, 4, 5-го) дерево решений будет таким:	Первым пяти уравнениям будет соответствовать отображение:													
<table border="1"> <tr> <td>x_1</td> <td>y_1</td> <td>x_2</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">1</td> <td>0</td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	x_1	y_1	x_2	0	0	0	1	1	1	0	X	1	1	
x_1	y_1	x_2												
0	0	0												
	1	1												
1	0	X												
	1	1												
Отображение для последнего уравнения:														

По построенному отображению заполним таблицу для вычисления количества решений:

	Количество решений по первым пяти уравнениям						Количество решений после подключения последнего уравнения
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_6
0	1	2	4	8	16	32	32
1	1	3	7	15	31	63	95

Ответ: $32 + 95 = 127$ решений

Второй способ

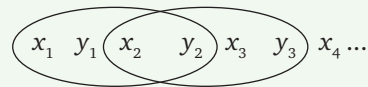
$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_5 \rightarrow x_6) = 1 \\ (x_1 \rightarrow y_1) \cdot (x_2 \rightarrow y_2) \cdot (x_3 \rightarrow y_3) \cdot (x_4 \rightarrow y_4) \cdot (x_5 \rightarrow y_5) \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1 \end{cases}$$

Так же, как и в предыдущем случае, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_2 \rightarrow y_2) = 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_3 \rightarrow y_3) = 1 \\ (x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_4 \rightarrow y_4) = 1 \\ (x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_5 \rightarrow y_5) = 1 \\ x_6 \rightarrow y_6 = 1 \end{cases}$$

В первых пяти уравнениях по три переменных. Пара (x_1, y_1) определяет количество возможных сочетаний пары (x_2, y_2) , а пара (x_3, y_3) получается из пары (x_2, y_2) по точно такому же правилу. Но в первом уравнении нет y_2 , а во втором не хватает y_3 и так далее. Значит, первое уравнение не накладывает никаких ограничений на значения y_2 , а второе — на y_3 и т.д. Значит, их значения могут быть любыми. Добавим недостающие переменные в первые пять уравнений, не изменяя систему.

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) + y_2 \cdot \overline{y_2} = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_2 \rightarrow y_2) + y_3 \cdot \overline{y_3} = 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_3 \rightarrow y_3) + y_4 \cdot \overline{y_4} = 1 \\ (x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_4 \rightarrow y_4) + y_5 \cdot \overline{y_5} = 1 \\ (x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_5 \rightarrow y_5) + y_6 \cdot \overline{y_6} = 1 \\ x_6 \rightarrow y_6 = 1 \end{cases}$$

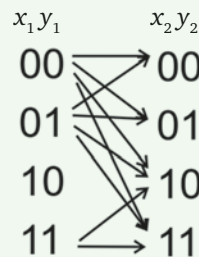


Каждое уравнение системы зависит от четырех переменных. Общими переменными для соседних уравнений является пара переменных.

$$(x_1, y_1) \Rightarrow (x_2, y_2) \Rightarrow (x_3, y_3) \Rightarrow (x_4, y_4) \Rightarrow (x_5, y_5) \Rightarrow (x_6, y_6)$$

Построим дерево решений первого уравнения и отображение множеств ему соответствующее.

x_1	y_1	x_2	y_2
0	0	0	0
		1	1
		0	1
	1	0	0
		1	0
		1	1
1	0	x	
	1	1	1



При заполнении таблицы будем использовать это отображение пять раз и вычислим количество пар (x_6, y_6) . Можно задать отображение матрицей смежности.

	источник	приемник				Количество решений по первым пяти уравнениям					
		00	01	10	11	x_1, y_1	x_2, y_2	x_3, y_3	x_4, y_4	x_5, y_5	x_6, y_6
	00	+	+	+	+	1	2	4	8	16	32
	01	+	+	+	+	1	2	4	8	16	32
	10					1	3	7	15	31	63
	11			+	+	1	3	7	15	31	63

Последнему уравнению не удовлетворяет пара (10). Ответ будет складываться из значений последнего столбика, соответствующих парам (00), (01) и (11).

$$32 + 32 + 63 = 127$$

Ответ: 127

Решение задания В15 легко переносится в электронную таблицу или на язык программирования, и выбор можно оставить за учеником. Возможно, когда-нибудь так и будет. На пути к ответу ученик пройдет все этапы: от построения математической модели до ответа.